La tradition retrouvée des algébristes arabes

Démonstration du "chaînon manquant" de la tradition des mathématiciens arabes pendant huit siècles

Michel Paty, écrit dans Recherches N° 167, un article, très documenté où il trace avec objectivité, le processus d'évolution de l'algèbre, dans un contexte arabe.

"On s'imagine souvent - dit-il - dans les pays occidentaux, que la science est occidentale et européenne, sous le prétexte que, dans sa forme moderne, c'est dans ces contrées qu'elle s'est développée avec la rapidité que l'on sait. Ce mythe (car, c'en est un) a été longtemp partagé et entretenu par les historiens et les historiens des sciences eux-mêmes, coupables d'un ethnocentrisme qui ne voulait d'origines à la science classique que dans le monde grec. Ce qui n'était pas occidental jouait, pour ainsi dire, un rôle de simple figurant sur la scène de l'histoire des sciences. Les sciences issues d'autres cultures auraient été, selon cette vue, incapables de visée ou de pensée théorique ; elles seraient l'oeuvre d'artisans uniquement préoccupés de dominer les règles de leur art. Elles n'auraient conduit qu'à énoncer des recettes empiriques ou à donner de simples méthodes de calcul. Tel serait en particulier le cas des sciences arabes, dont le seul rôle, par ailleurs, aurait été de transmettre à l'Occident l'héritage des Grecs.

Plusieurs travaux, au premier rang desquels ceux de **Roshi Rashed sur l'histoire des mathématiques arabes,** permettent une interprétation plus objective. En mettant en évidence certains faits jusqu'ici inconnus ou ignorés, ils font disparaître certains **blocages idéologiques qui entravaient la recherche historique.** Le récent ouvrage de R. Rashed intitulé(Entre arithmétique et algèbre) constitue une véritable enquête qui, d'indice en découverte, perce plusieurs énigmes et parvient à reconstituer un tableau qui vit sous nos yeux, celui de **l'école des mathématiciens algébristes arabes. (1)**

Tout le monde sait que le mot algèbre est d'origine arabe, comme un certain nombre d'autres termes scientifiques. Mais où et comment est née l'algèbre ? Les avis sur ce point sont partagés. Faut-il la voir déjà dans les travaux du Grec alexandrin Diophante ? Ou attendre Viète, à la Renaissance ? Au IX^{e} siècle, al-Khwarizmi (né avant 800, mort en 847) écrivit Le *livre concis du calcul de l'algèbre et d'al-muqâbala.*

Ce texte, où apparaît, pour la première fois, le *algèbre,* est-il le premier ouvrage consacré à cette discipline ? L'absence de documents ne pourrait conduire qu'à des supputations stériles et discutables. Aussi, Rashed préfère-t-il poser la question en ces termes : que représente exactement ce qui est appelé "algèbre", dans cet ouvrage comme ensemble de définitions, de problèmes abordés, de méthodes de formalisation, d'applications pratiques ? l'examen du livre d'al-Kwârizmi, sous cet angle, montre que l'algèbre s'y présente, pour la première fois dans l'histoire, comme une théorie de portée générale : d'abord par les objets auxquels elle s'applique, qui sont aussi bien des nombres que des grandeurs géométriques, ensuite par le caractère de ses opérations, qui marque déjà l'unité de cette discipline.

Premier exposé de l'algèbre, le livre d'al-Khwârizmi ne se présente pas comme une succession de problèmes particuliers à résoudre (ce qui était le cas des traités antérieurs). mais propose d'emblée une généralisation. Ce qui constitue le véritable objet de l'algèbre, ce sont désormais, non pas des formes singulières (par exemple numériques), mais des prototypes de toutes les combinaisonss que l'on peut faire dériver de termes primitifs. La notion d'équation est conçue de manière générique, "pour elle-même", comme désignant une classe infinie de problèmes. Toujours, afin de généraliser, al-Khwârizmi introduit la notion de ce que nous appelons aujourd'hui la forme normale d'une équation (une équation du type $ax^2 + bx = c$' est transformée en une équation du type $x^2 + px = q$). **Al-Khwârizmi se proposait de réduire tous les problèmes algébriques à des équations à une seule inconnue et à coefficients rationnels positifs du second degré au plus. Mais, plutôt que de la généralité de l'être mathématique (l'inconnue) dont s'occupe l'algèbre, cette nouvelle discipline tient son unité, dans l'oeuvre d'al-Khwârizmi, surtout de la généralité de ses opérations ; la systématisation de ces dernières est, dès lors, rendue possible et sera réalisée par ses successeurs, grâce à l'arithmétisation de l'algèbre. C'est en reconnaissant, ainsi, ce qu'est l'algèbre, comme forme de pensée chez cet auteur, que R. Rashed montre comment al-Khwârizmi "a pu penser ce qu'aucun de ses prédécesseurs n'avait pu concevoir". Il définissait une nouvelle discipline mathématique autonome, déjà grosse de ses développements ultérieurs, lesquels allaient être le fruit des travaux d'une véritable école d'algébristes.**

C'est, en effet, une véritable tradition algébrique qui se constitue après les travaux d'al-Khwârizmï. Si cette tradition a été ignorée par les historiens, c'est qu'ils considéraient seulement des ouvrages ou des savants isolés (dont il était, d'ailleurs, difficile de discerner exactement l'originalité et l'importance). S'intéressant à la pensée des mathématiciens postérieurs à al-Khwârizmï, en particulier à al-Karajï (début du X^e siècle - début du XI^e), R. Rashed s'est posé le problème des sources de la pensée de ce dernier. Al-Karajï avait hérité de la pensée d'al-Khwarizmi, mais avait également lu, en traduction arabe, des travaux de Diophante dont al-Khwârizmi n'avait pu avoir connaissance. C'est, précisément, cette conjonction de l'algèbre d'al-Khwârizmi et des arithmétiques de Diophante, qui rendit possible le développement et même le renouvellement de l'algèbre. Menée sur cette base, l'enquête s'est avérée particulièrement fructueuse.

R. Rashed a voulu, en effet, savoir ce que contenait la traduction arabe des Arithmétiques de Diophante, utilisée par al-Karajï, pour comprendre comment l'algèbre artithmétique s'était développée du X^e au XII^e siècle. Après de longues recherches, il la découvrit en 1971 en Iran, dans la bibliothèque de Mesched. La trouvaille fut autre que ce qu'il escomptait ; tels sont parfois les rebondissements d'une recherche qui révèlent un objet bien plus riche qu'on n'osait l'espérer... Alors qu'il n'était en quête que de la traduction arabe des six livres grecs que l'on connaissait déjà, Rashed découvrit quatre nouveaux livres dont l'original grec avait été perdu. Etudiant ces textes par les méthodes de l'historiographie, il put authentifier qu'il s'agissait bien d'un texte de Diophante, traduit par l'érudit Ibn Lûqâ, lequel avait effectué son travail vers 870(2).

Diophante d'Alexandrie vécut probablement entre le II^e et le III^e siècle après J.C. Son ouvrage, (les Arithmétiqes), comportait treize livres dont seulement six étaient connus par la tradition grecque. Il semble ne pas avoir eu d'influence sur les mathématiques hellénistiques, jusqu'au moment de sa traduction en arabe, puis sur les mathématiques de la Renaissance et jusqu'à la période moderne (voir l'analyse diophantienne en théorie des nombres). La découverte des textes perdus et l'analyse rigoureuse de l'ensemble des livres, désormais connus de Diophante) permet de voir que l'ouvrage du mathématicien alexandrin est bien un traité d'arithmétique et non d'algèbre (comme les mathématiciens du XVI^e siècle, Bombelli, Stevin, le croyaient)(3). Il s'agissait, pour Diophante, d'"édifier une théorie arithmétique dont les éléments constitutifs soient les nombres, considérés comme pluralités d'unités, et les partises fractionnaire comme fractions de grandeurs(4).

Aux XI^e et XII^e siècles, une véritable école mathématique se développa autour du double héritage de l'algèbre d'al-Khwârizmï et des Arithmétiques de Diophante ; elle opéra un véritable renouvellement de l'algèbre par son arithmétisation. Al-Karajï et son école appliquèrent, en effet, les opérations de l'arithmétique (addition, soustraction, multiplication, division, extraction de racines), qui étaient jusque-là restreintes aux seuls nombres, aux expressions algébriques et en particulier aux polynômes. Comme l'exprima un membre de cette école, al-Samaw'al (mort vers 1180), il s'agissait d'"opérer sur les inconnues au moyen de tous les instruments arithmétiques, comme l'arithméticien opère sur les connues". C'est ainsi qu'al-Karajï étudia, de manière systématique, les exposants algébriques, étendit les opérations arithmétiques aux expressions algébriques irrationnelles et effectua une véritable réinterprétation des Elements d'Euclide, jusqu'alors relatifs à la géometrie et appliqués, désormais, au domainc de la théorie des nombres.

Tout en obtenant ces résultats par l'extension du domaine d'application des opérations arithmétiques, les algébristes arithméticiens rendaient possible "un autre recommencement de l'algèbre" ; celle-ci n'était, en effet, plus liée à l'arithmétique, mais rattachée à la géometrie par l'étude systématique des équations cubiques. Certains problèmes du troisième degré avaient été posés par l'astronomie (voir l'oeuvre d'al-Bïruni (973-1048) et la tâche consistait à en donner une traduction algébrique. Ces développements feront l'objet d'un autre ouvrage de R. Rashed qui s'intitulera, sans doute,(Entre algèbre et géométrie). Mais cet autre recommencement n'est pas indépendant du premier. L'on retrouve, dans les deux, le nom d'al-Tüsï (1201-1274), par exemple, qui saisit et exprima l'importance du discriminant dans la discussion des équations cubiques ; on rencontre chez lui, non nommée mais présente, la notion de dérivée, qui fait partie intégrante de la résolution des équations algébriques et numériques.

La reconnaissance de cette tradition des algébristes arabes permet, par ailleurs, de comprendre certaines énigmes auxquelles se heurtaient, jusque-là, les historiens des sciences. Les fractions décimales, par exemple, étaient rapportées au mathématicien flamand Stevin (1548-1620) ; puis on découvrit l'oeuvre d'al-Kâshï, mathématicien arabe du XVe siècle (mort en 1429), où les fractions décimales se trouvaient déjà présentes. Comme l'on ne voyait pas de filiation directe d'al-Kâshï à Stevin, on conclut à une invention isolée, ensuite oubliée.

Or, l'étude faite par R. Rashed des travaux des mathématiciens de l'école d'al-Karajï, montre qu'ils possédaient "tous les moyens théoriques nécessaires à la conception des fractions décimales". Et de fait, en cherchant bien, il s'avéra que le Traité d'arithmétique de l'algèbriste al-Samaw'al, appartenant à cette école, contenait bien un exposé des fractions décimales. Cet exposé fait suite à l'étude, par cet auteur, de problème d'approximation de la racine n-ième d'un nombre. Les fractions décimales étaient bien connues à l'époque et appartenaient à une tradition, dont l'oeuvre d'al-Kâshï, au XVe siècle, étaient évidemment tributaire. Cette tradition était passée à l'Occident bien avant al-Kâshï, mais avec une perte relative d'information.

Ainsi l'énigme d'un précurseur isolé est-elle dissipée et l'image de l'algèbre arabe telle que la présente l'historiographie traditionnelle doit être modifiée. Un problème semblable se posait, à prospos de la résolution des équations numériques, que la tradition rapportait à Viète. En effet, on trouva également, chez des mathématiciens arabes, les méthodes de résolution des équations numériques dont Viète et plus tard Ruffini et Horner ont fait usage.

Là encore, il ne s'agit pas de "précurseurs" isolés, car cette question appartenait aussi à la tradition des mathématiciens arabes et est traitée notamment par al-Kayyâm (qui est aussi l'auteur des célèbres poèmes Roubayat) et al-Tûsï. Il est inutile de préciser que ces nouveaux aperçus historiques n'enlèvent rien aux mérites des mathématiciens européens de la Renaissance, qui ont apporté leurs contributions propres. Ils permettent seulement de mieux comprendre le développement des mathématiques comme champ de rationalité et de percevoir le "chaînon manquant" de la tradition des mathématiciens arabes, qui porte sur une période de huit siècles et sur un espace géographique immense allant de l'Iran à l'Espagne.

D'autres résultats importants, issus de la tradition mathématique arabe, concernent différents domaines, notamment la théorie des nombres. Il ne nous reste qu'à renvoyer le lecteur, si cette évocation a pu le mettre en appétit, à la lecture du livre de R. Rashed, (Entre arithmétique et algèbre), essai sur les mathématiques arabes.

---

(1) R. Rashed, Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes, Les Belles Lettres, 1984.

(2) R. Rashed. "Les travaux perdus de Diophante", Revue d'histoire des sciences, 27, 2, 1974 ; 28-97, 1975.

(3) Diophante, Les Arithmétiques, tome III (livreIV, Des carrés et des cubes) et tome IV (livres V, VI, VII), traduits du grec en arabe par Qüstâ ibn Lüqä de Baalbek ; texte établi et traduit en français par R. Rashed, Les Belles Lettres. 1984 : t. III, 162 p. ; t. IV, les textes déjà connus en grec, voir la nouvelle traduction donnée par André Allard : Diophante, Les Arithmétiques, vol. II, V,(éditions Les Belles Lettres, Paris).

(4) R. Rashed, "Diophante d'Alexandrie", Encyclopaedia Universalis, nouv. édi., vol 6,.1984.